



## МАШИНОЗНАВСТВО

УДК 628.862.3

**Серілко Л. С., к.т.н., доцент, Тимейчук О. Ю., к.т.н., доцент,  
Серілко Д. Л., к.т.н., асистент** (Національний університет водного  
господарства та природокористування, м. Рівне)

### **ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ ЧАСТИНОК СИПКОГО МАТЕРІАЛУ ПО ЦИЛІНДРИЧНІЙ ПОВЕРХНІ, ЯКА ЗДІЙСНЮЄ КОЛИВАЛЬНИЙ РУХ ВЗДОВЖ ОСІ СИМЕТРІЇ**

**В роботі наведені результати теоретичних досліджень руху частинок сипкого матеріалу по циліндричній поверхні, яка здійснює коливальний рух вздовж осі симетрії. Визначені значення відносних переміщень та швидкостей частинки в залежності від радіуса циліндра, коефіцієнта тертя, частоти та амплітуди коливань.**

**Ключові слова:** коливальний рух, сипкий матеріал, циліндрична поверхня, коефіцієнт тертя, частота амплітуда.

**Вібраційна техніка** в наш час є галуззю машинобудування, яка розвивається швидкими темпами. За словами І.І. Блехмана, вона проводить технологічну революцію в різних галузях промисловості. Сьогодні важко уявити без вібраційних машин підприємства по збагаченню корисних копалин, виробництву будівельних матеріалів і конструкцій, по переробці зерна тощо [1].

Вібраційна взаємодія, за твердженнями К.Н. Фролова, в десятки та сотні раз інтенсифікує різні технологічні процеси. Безумовно, це прогресивна технологія, яка напрямлена в майбутнє [2].

В роботі П.М. Заїки [3] розглядається рух частинок сипкого матеріалу по зовнішній поверхні циліндра, який здійснює коливальний рух вздовж своєї осі. Наводяться залежності швидкості руху частинок матеріалу від геометричних параметрів циліндра, його частоти і амплітуди коливань, та коефіцієнту тертя частинки матеріалу по поверхні циліндра.

В роботі [4] розглядається рух частинок сипкого матеріалу внутрішній поверхні тонкостінного циліндра, який здійснює коливальний рух вздовж своєї осі.

**Метою даної роботи є** визначення швидкості та траєкторії руху матеріальної точки по внутрішній поверхні циліндра, який здійснює коливальний рух вздовж своєї осі симетрії по закону  $z_1 = A \sin kt$ .

Розглянемо рух частинок сипкого матеріалу по внутрішній поверхні циліндра радіуса  $R$  під дією сили тяжіння  $P$ , нормальної реакції  $N$ , сили тертя  $F_T$  і сили інерції  $\Phi$ , яка виникає внаслідок коливального руху циліндра.

Положення точки на цій поверхні визначається координатами

$\varphi$  та  $z$  в циліндричній системі координат (рис. 1).

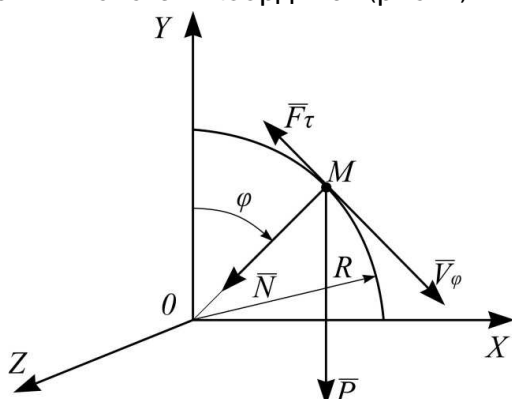


Рис. 1. Розрахункова схема руху частинки сипкого матеріалу по внутрішній поверхні циліндра

Згідно закону Кулона, сила тертя буде рівна  $F_T = fN$ , де  $f$  – коефіцієнт тертя частинки по поверхні циліндра;  $N$  – нормальна складова реакції поверхні. Оскільки сила тертя завжди напрямлена в протилежний бік від швидкості руху, то проекції цієї сили на осі  $\tau$  та  $z$  будуть рівні:

$$F_\tau = -F_T \frac{V_\varphi}{V} = -fN \frac{V_\varphi}{V}; \quad (1)$$

$$F_z = -F_T \frac{V_z}{V} = -fN \frac{V_z}{V}, \quad (2)$$

де  $V_\varphi = R \dot{\varphi}$  – трансверсальна складова швидкості руху частинки по поверхні циліндра;  $V_z = \dot{z}$  – проекція швидкості руху частинки по поверхні циліндра на вісь  $z$ .

Сила інерції  $\Phi = m \ddot{z} = mA k^2 \sin kt$ .

Тоді рівняння руху частинки по поверхні циліндра матимуть вигляд:

$$\begin{cases} m \left( \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 \right) = \sum F_{kr}; \\ m \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( \ddot{r} - r^2 \dot{\varphi} \right) = \sum F_{k\varphi}; \\ m \ddot{z} = \sum F_{kz}. \end{cases} \quad (3)$$

В нашому випадку, з врахуванням, що  $r = R = const$ , будемо мати:

$$\begin{cases} mR\ddot{\varphi} = mg \sin \varphi - fN \frac{R\dot{\varphi}}{\sqrt{(R\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2}}; \\ mR\dot{\varphi}^2 = N + mg \cos \varphi; \\ m\ddot{z} = -fN \frac{\dot{z}}{\sqrt{(R\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2}} + mAk^2 \sin kt. \end{cases} \quad (4)$$

Визначимо з другого рівняння системи (4) нормальну реакцію  $N$  і підставимо в перше і третє рівняння.

$$N = mR\dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi. \quad (5)$$

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} = \frac{g \sin \varphi}{R} - \frac{f(R\dot{\varphi}^2 - g \cos \varphi)\dot{\varphi}}{\sqrt{(R\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2}}; \\ \ddot{z} = Ak^2 \sin kt - f \frac{(R\dot{\varphi}^2 - g \cos \varphi)\dot{z}}{\sqrt{(R\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2}}. \end{cases} \quad (6)$$

З рівняння (5) можна визначити мінімальне значення початкової кутової швидкості  $\omega_0 = \dot{\varphi}_0$ , при якій можливий рух внутрішньою поверхнею циліндра.

$$R\omega_0^2 - g \cos \varphi = 0; \quad (7)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g \cos \varphi}{R}}. \quad (8)$$

На рис. 2 наведено графік залежності мінімальної кутової швидкості частинки від геометричних параметрів циліндра:

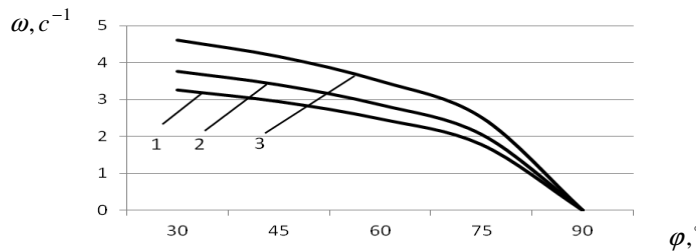


Рис. 2. Залежність мінімальної початкової кутової швидкості частинки від геометричних параметрів циліндра:  
1 –  $R=0,4$  м; 2 –  $R=0,6$  м; 3 –  $R=0,8$  м

Оскільки система рівнянь (6) суттєво нелінійна, то вона не може бути проінтегрована в квадратурах і її періодичний розв'язок не може бути знайдений в замкнутій формі.

Враховуючи, що  $\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt}$ ,  $\ddot{z} = \frac{d\dot{z}}{dt}$ , замінимо систему (4) системою чотирьох рівнянь

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} = f_1(\varphi; z; t); \\ \dot{\varphi} = f_2(\varphi; z; t); \\ \ddot{z} = f_3(\varphi; z; t); \\ \dot{z} = f_4(\varphi; z; t). \end{cases} \quad (9)$$

Початкові умови руху  $\dot{\varphi}_0 = \omega_0$ ;  $\varphi_0 = 0$ ;  $\dot{z}_0 = V_{z_0} = 0$ ;  $z_0 = 0$ .

Наближені значення  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$ ,  $z$ ,  $\dot{z}$  обчислюються за рекурентними формулами:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_{i+1} = \dot{\varphi}_i + hf_1(\varphi; z; t); \\ \varphi_{i+1} = \varphi_i + hf_2(\varphi; z; t); \\ \dot{z}_{i+1} = \dot{z}_i + hf_3(\varphi; z; t); \\ z_{i+1} = z_i + hf_4(\varphi; z; t). \end{cases} \quad (10)$$

де  $h$  – крок інтегрування.

На рис. 3-6 наведені графічні залежності відносних кутових швидкостей і переміщень частинок сипкого матеріалу по циліндричній поверхні залежно від часу  $t$ , та кута  $\varphi$ , при різних значеннях коефіцієнта тертя  $f$ , частоти  $k$  та амплітуди коливань  $A$ .

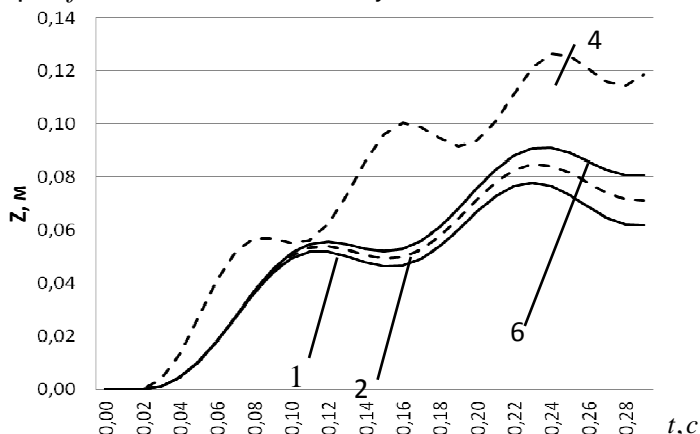


Рис. 2. Залежність відносного осевого переміщення частинки сипкого матеріалу по циліндричній поверхні від часу  $t$ :

1 –  $f=0,25$ ; 2 –  $f=0,5$ ; ( $R=0,06$  м;  $A=0,01$  м;  $k=50$  с<sup>-1</sup>);  
3 –  $k=50$  с<sup>-1</sup>; 4 –  $k=75$  с<sup>-1</sup> ( $R=0,06$  м;  $A=0,01$  м;  $f=0,35$ )

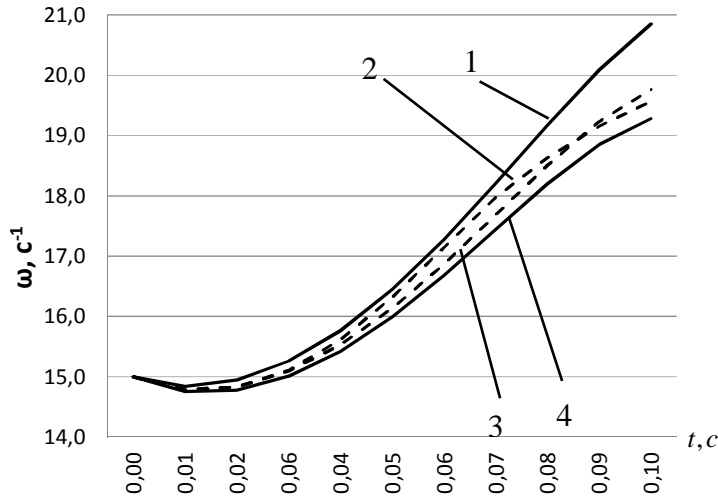


Рис. 3. Залежність відносної кутової швидкості частинки сипкого матеріалу по циліндричній поверхні від часу  $t$ :

1 –  $f=0,25$ ; 2 –  $f=0,5$ ; ( $R=0,06$  м;  $A=0,01$  м;  $k=50$  с $^{-1}$ );  
3 –  $k=50$  с $^{-1}$ ; 4 –  $k=75$  с $^{-1}$  ( $R=0,06$  м;  $A=0,01$  м;  $f=0,35$ )

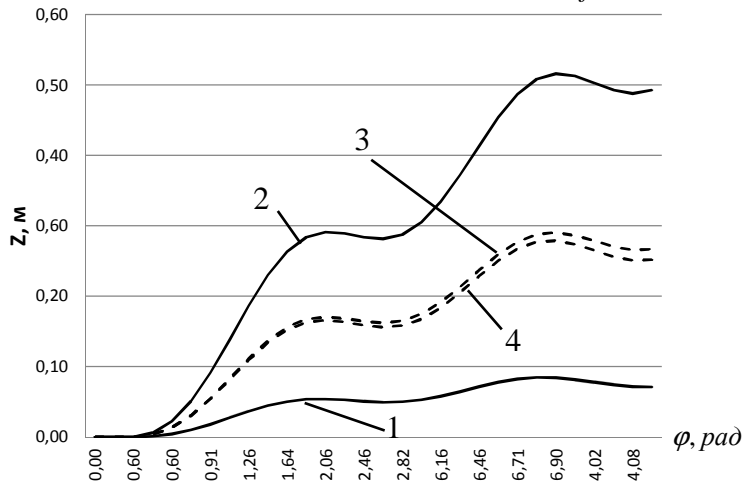


Рис. 4. Залежність відносного осьового переміщення частинки сипкого матеріалу по циліндричній поверхні від кута  $\varphi$ :

1 –  $A=0,01$  м; 2 –  $A=0,05$  м; ( $R=0,06$  м;  $f=0,35$ ;  $k=50$  с $^{-1}$ );  
3 –  $R=0,06$  м; 4 –  $R=0,12$  м; ( $A=0,03$  м;  $f=0,35$ ;  $k=50$  с $^{-1}$ )

Як видно з наведених графіків, найбільш суттєво на величину осьового переміщення частинки сипкого матеріалу по внутрішній поверхні циліндра впливає частота коливань (рис. 2) та амплітуда коливань (рис. 4). Разом з тим ці параметри мало впливають на величину відносної кутової швидкості (рис. 3, рис. 5).

**Отримані залежності** параметрів руху частинок сипкого матеріалу по циліндричній поверхні можуть бути використані при проектуванні різноманітної вібраційної техніки.

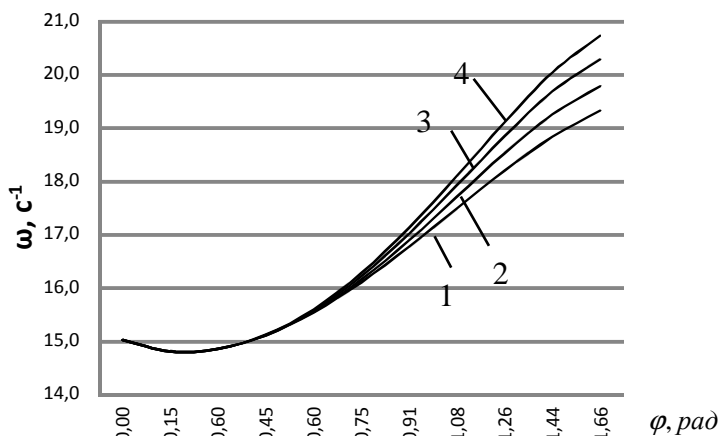


Рис. 5. Залежність відносної кутової швидкості частинки сипкого матеріалу по циліндричній поверхні від кута  $\varphi$ :

1 –  $A=0,005$  м; 2 –  $A=0,01$  м; 3 –  $A=0,015$  м; 4 –  $A=0,02$  м;  
( $R=0,06$  м;  $f=0,35$ ;  $k=50 \text{ c}^{-1}$ )

1. Блехман И. И. Вибрационная механика / И. И. Блехман. – М. : Физматлит, 1994. – 400 с. 2. Фролов К. В. Многоликий мир вибраций / К. В. Фролов // Наука и человечество. – М. : Знание, 1985. – С. 241–260. 3. Заика П. М. Вибрационное перемещение твердых и сыпучих тел в сельскохозяйственных машинах: Практик. Пособие / П. М. Заика. – Киев : Изд-во УСХА. – 529 с. 4. Серілко Л. С. Дослідження руху сипкого матеріалу по внутрішній поверхні циліндра / Л. С. Серілко, В. О. Щурик, О. Ю. Тимейчук // Матеріали міжнар. наук-техн. конф. «Фундаментальні та прикладні проблеми сучасних технологій» : тези допов. – Тернопіль, 2015. – С. 139.

Рецензент: д.п.н., професор Козяр М. М. (НУВГП)

---

**Serilko L. S., Candidate of Engineering, Associate Professor,**  
**Tymeichuk O. Y., Candidate of Engineering, Associate Professor,**  
**Serilko D. L. Candidate of Engineering, Assistant** (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

## STUDY OF LOOSE MATERIAL PARTICLES MOTION ON CYLINDRICAL SURFACE, WHICH PROVIDES AN OSCILLATORY MOTION ALONG THE SYMMETRY AXIS

The paper presents the results of theoretical studies of loose material particles motion on cylindrical surface, which provides an oscillatory motion along the symmetry axis. The relative displacement and velocity of a particle depending on the radius of the cylinder, friction

coefficient, frequency and amplitude are determined.

**Keywords:** oscillatory motion, loose material, cylindrical surface, friction coefficient, frequency, amplitude.

---

**Серилко Д. Л., к.т.н., доцент, Тимейчук О. Ю., к.т.н., доцент,  
Серилко Д. Л., к.т.н., ассистент** (Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно)

### **ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ СЫПУЧЕГО МАТЕРИАЛА ПО ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ, КОТОРАЯ СОВЕРШАЕТ КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВДОЛЬ ОСИ СИММЕТРИИ**

В работе приведены результаты теоретических исследований движения частиц сыпучего материала по цилиндрической поверхности, которая совершает колебательное движение вдоль оси симметрии, определены значения относительных перемещений и скоростей частицы в зависимости от радиуса цилиндра, коэффициента трения, частоты и амплитуды колебаний

**Ключевые слова:** колебательное движение, сыпучий материал, цилиндрическая поверхность, коэффициент трения, частота, амплитуда.

---